

| | |
|-------------|---|
| Title | 多項式係数偏微分作用素の値域が稠密でない例について (位相解析的方法による偏微分方程式の研究) |
| Author(s) | 津野, 義道 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (1972), 160: 5-11 |
| Issue Date | 1972-09 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/106898 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

多項式係数偏微分作用素の

値域が稠密でない例について

広大理 津野義道

§ 1. 序

Ω を、複素 n 次元空間 \mathbb{C}^n のある領域とし、 $H(\Omega)$ は、 Ω 内で $z = (z_1, \dots, z_n)$ に関して正則な関数の全体で、compact convergence 位相を入れたものとする。 Ω が凸領域の場合は、任意の定数係数偏微分作用素 $P(\frac{\partial}{\partial z})$ に対して、

$P(\frac{\partial}{\partial z}): H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ は surjective となり、従って特に $P(\frac{\partial}{\partial z})$ の値域 $P(\frac{\partial}{\partial z})H(\Omega)$ は、 $H(\Omega)$ で稠密となる。ここでは、変数係数の場合、その値域が稠密になるかどうかを調べる。例えば、作用素 $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ の係数が Ω のある点 z_0 を共通零点として持てば、 $H(\Omega)$ の $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ による値域に属する関数は、 z_0 で 0 となり、従ってその値域は、

$H(\Omega)$ で稠密とはなり得ない。この小文の目的は、例え

$P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ の係数が Ω で共通零点を持たなくても、その値域が稠密でないような例を構成する事である。構成にあたって

の本質的な部分は、I. Wakabayashi [5] による。

§ 2. 一次元の場合の考察

解析的汎関数と compact support をもつ distribution の関係から、次の Proposition が知られている。

Proposition 1. (Y. Tsuno [3], p. 148):

Ω を \mathbb{C} 内の non-simply connected domain,
 $P(\frac{d}{dz})$ を order ≥ 1 の定数係数微分作用素とすると、
 $P(\frac{d}{dz})H(\Omega)$ は $H(\Omega)$ で稠密にならない。

Proof

$P(\frac{d}{dz}): H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ の adjoint operator
 $P(-\frac{d}{dz}): H'(\Omega) \rightarrow H'(\Omega)$ が一対一でないことを示せばよい。
 多項式 $P(X)$ は、order ≥ 1 だから、 $P(-\alpha) = 0$ となる複素数 α がある。又、 Ω が non-simply connected だから、 $\mathbb{C}\Omega$ には compact component K がある。そこで $S_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ を、

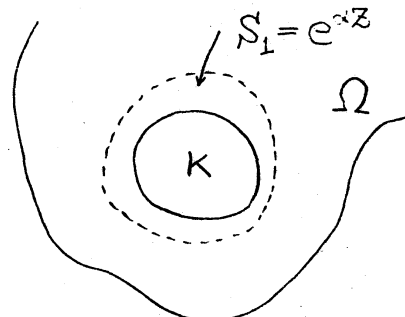
$$S_1 = e^{\alpha z} \quad \text{--- } K \text{ の近傍で、}$$

かつ、 $\text{supp } S_1 \subset K \cup \Omega$

となるものとする。さらに、

$$S_2 = \frac{d}{dz} S_1, \quad S_3 = P(-\frac{d}{dz}) S_1$$

とおく。このとき、



$$\text{supp } S_2 \subset \Omega, \quad \text{supp } S_3 \subset \Omega$$

即ち、 $S_2 \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $S_3 \in \mathcal{E}'(\Omega)$ となる。そこで、

$\mu \in H'(\Omega)$ も、 S_2 の $H(\Omega) (\subset C^\infty(\Omega))$ への制限とする。

$$\text{i.e.} \quad \mu(f) = \langle S_2, f \rangle \quad \text{for } \forall f \in H(\Omega).$$

このとき、 $\mu \neq 0$ in $H'(\Omega)$. 何故なら、もし $\mu = 0$ とす

れば、解析的汎関数と distribution の関係 $H'(\Omega) \cong$

$$\mathcal{E}'(\Omega) / \frac{d}{dz} \mathcal{E}'(\Omega) \quad \text{と、} \mu \text{ の作り方より、} \frac{d}{dz} S_1 \in \mathcal{E}'(\Omega)$$

は、ある $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ に対して、 $\frac{d}{dz} S_1 = \frac{d}{dz} T$ と表わ

せるはずであり、 $\frac{d}{dz} : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ は一対一だから

これから、 $S_1 = T$ となるが、これは $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$,

$\text{supp } S_1 \not\subset \Omega$ に矛盾する。一方

$$P(-\frac{d}{dz}) S_2 = \frac{d}{dz} P(-\frac{d}{dz}) S_1 = \frac{d}{dz} S_3 \in \frac{d}{dz} \mathcal{E}'(\Omega)$$

だから、 $P(-\frac{d}{dz}) \mu = 0$. 従って $P(-\frac{d}{dz}) : H'(\Omega) \rightarrow H'(\Omega)$

は一対一ではない。

Q.F.D.

Remark. Proposition 1 の、analytic functional を使わずに、operator の index を使う elegant な別証が、

小松(彦)先生によ、て得られている。

§ 3. 微分作用素の構成

Wermer の例 (Gunning-Rossi [1], p. 38) を使う。 F を \mathbb{C}^3 から \mathbb{C}^3 への holomorphic map ;

$$F(z_1, z_2, z_3) = (w_1, w_2, w_3)$$

$$= (z_1, z_1 z_2 + z_3, z_1 z_2^2 - z_2 + 2 z_2 z_3)$$

とする。この時、 b ($0 < b < \frac{1}{2}$) を十分小さくとれば、

F は polydisc Δ_b :

$$\Delta_b = \{ (z_1, z_2, z_3) \mid |z_1| < 1+b, |z_2| < 1+b, |z_3| < b \}$$

を、その image $D = F(\Delta_b) \rightarrow$ biholomorphic に移す。

又、 $\pi = \{(w_1, 1, 0)\}$ とすると、

$$\pi \cap D = \{(w_1, 1, 0) \mid \frac{1}{1+b} < |w_1| < 1+b\}$$

となる。さらに、 D が正則領域であることから、 $\pi \cap D$ 上で正則な関数は D 全体で正則な関数にまで延長可能である。

以上を使って、問題の作用素を構成する。

Proposition 1 より、 $\sum_{k=0}^m a_k \left(\frac{d}{dw_1}\right)^k$, ($m \geq 1$, $a_m \neq 0$, a_k : const.) は、 $H(\pi \cap D)$ (一変数 w_1 の関数とみたもの) の中で考えて、その値域は稠密ではない。そこで、 $H(\pi \cap D)$ が $H(D)$ まで延長可能であることを使えば、

$$\left\{ \sum_{k=0}^m a_k \left(\frac{\partial}{\partial w_1}\right)^k \right\} H(D)$$

は $H(D)$ で稠密でない。又、 D と Δ_b とは biholomorphic であるから、上の作用素を $H(\Delta_b)$ 上に移すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_1} &= \frac{\partial z_1}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial z_2}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial z_3}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_3} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{z_2^2}{1-2z_3} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{z_1 z_2^2 - z_2 + 2z_2 z_3}{1-2z_3} \cdot \frac{\partial}{\partial z_3} \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} P(z, \frac{\partial}{\partial z}) \\ = (1-2z_3)^{2m-1} \sum_{k=0}^m a_k \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{z_2^2}{1-2z_3} \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{z_1 z_2^2 - z_2 + 2z_2 z_3}{1-2z_3} \frac{\partial}{\partial z_3} \right)^k \end{aligned}$$

とおけば、 $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ は多項式係数の偏微分作用素であり、
 それらの係数は Δ_b で共通零点を持たず (注: Δ_b 上では、
 $1 - 2z_3 \neq 0$)、 $P(z, \frac{\partial}{\partial z}) H(\Delta_b)$ は $H(\Delta_b)$ で稠密にはなら
 ない。以上、まとめると、

Proposition 2 :

$P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ を、上のように定義した微分作用素とすれば、
 それらの多項式係数は、 Δ_b で共通零点をもたなくて、
 かつ $P(z, \frac{\partial}{\partial z}) H(\Delta_b)$ は $H(\Delta_b)$ で稠密にならない。

§ 4. 付 記

Cauchy - Kowalevsky の定理について考えてみる。

Theorem (J. Leray [2], p 399) :

$P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ の係数は $\{z \mid |z_j| \leq R, j=1, \dots, n\}$ で正則、
 又 complex hyperplane $\{z_1=0\}$ が、 $z=0$ で $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$
 に關して non-characteristic とする。このとき、 $\{z_1=0\}$
 での Cauchy data の収束半径を r 、非齊次項の収束半径
 を R とした時、

$$\text{i.e. } \begin{cases} P(z, \frac{\partial}{\partial z}) u(z) = v(z), \text{ holo. on } \{ |z_j| \leq R, j=1, \dots, n \} \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^k u(z) \Big|_{z_1=0} = w_k(z_2, \dots, z_n), \text{ holo. on } \{ |z_j| \leq r, j=2, \dots, n \} \\ k=0, 1, \dots, m-1. \quad (m = \text{order of } P) \end{cases}$$

正則な一意解 $u(z)$ は、

$$\|z\| < \frac{1}{12nm} g \cdot \inf(gR, r)$$

で存在する。但し

$$\left\{ \begin{array}{l} \|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2, \\ N = (1, 0, \dots, 0), \quad P_m(z, p) \text{ は } P \text{ の principal part} \\ g = \frac{|P_m(0, N)|}{\sup_{\substack{|z_j|=R \\ |p|=1}} |P_m(z, p)|} \end{array} \right.$$

これを Proposition 2 で $m=1$, $a_1=1$, $a_0=0$ としたときの $Q(z, \frac{\partial}{\partial z})$

i.e. $Q(z, \frac{\partial}{\partial z}) = (1-2z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + (z_1 z_2^2 - z_2 + 2z_2 z_3) \frac{\partial}{\partial z_3}$
に適用すれば、($R=r=1$, $g \geq \frac{1}{7}$), 任意の $v(z)$: holomorphic on $\{|z_j| \leq 1, j=1,2,3\}$ に対して、 $Q(z, \frac{\partial}{\partial z}) u(z) = v(z)$ の解が、 $\{\|z\| < \frac{1}{36 \cdot 7^2}\}$ で存在する。そこで、

$\Delta = \{(z_1, z_2, z_3) \mid |z_j| < \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{36 \cdot 7^2} \quad j=1,2,3\}$
とおけば、 $\Delta \subset \{\|z\| < \frac{1}{36 \cdot 7^2}\}$ 。

又、 $H(\Delta)$ で多項式が稠密だから、結局、 $Q(z, \frac{\partial}{\partial z}) H(\Delta)$ は $H(\Delta)$ で稠密となる。

以上まとめると、上で定義した作用素 $Q(z, \frac{\partial}{\partial z})$ に対して

(i) $Q(z, \frac{\partial}{\partial z}) H(\Delta_h)$ は $H(\Delta_h)$ で稠密でない。

(ii) $Q(z, \frac{\partial}{\partial z}) H(\Delta)$ は $H(\Delta)$ で稠密である。

文 献

- [1] R. C. Gunning - H. Rossi : Analytic Functions of
Several Complex Variables.
Prentice-Hall Inc. (1965)
- [2] J. Leray : Problème de Cauchy I
Bull. Soc. Math. France 85 (1957) 389-430
- [3] Y. Tsuno : Analytic Functionals and Distributions
J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 34 (1970)
P. 145 - 152.
- [4] ——— : Differential Operator without a Dense
Range. to appear.
- [5] I. Wakabayashi : Non-existence of holomorphic
solutions of $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = f$.
Proc. Jap. Acad. 44 (1968) pp. 820 - 822.